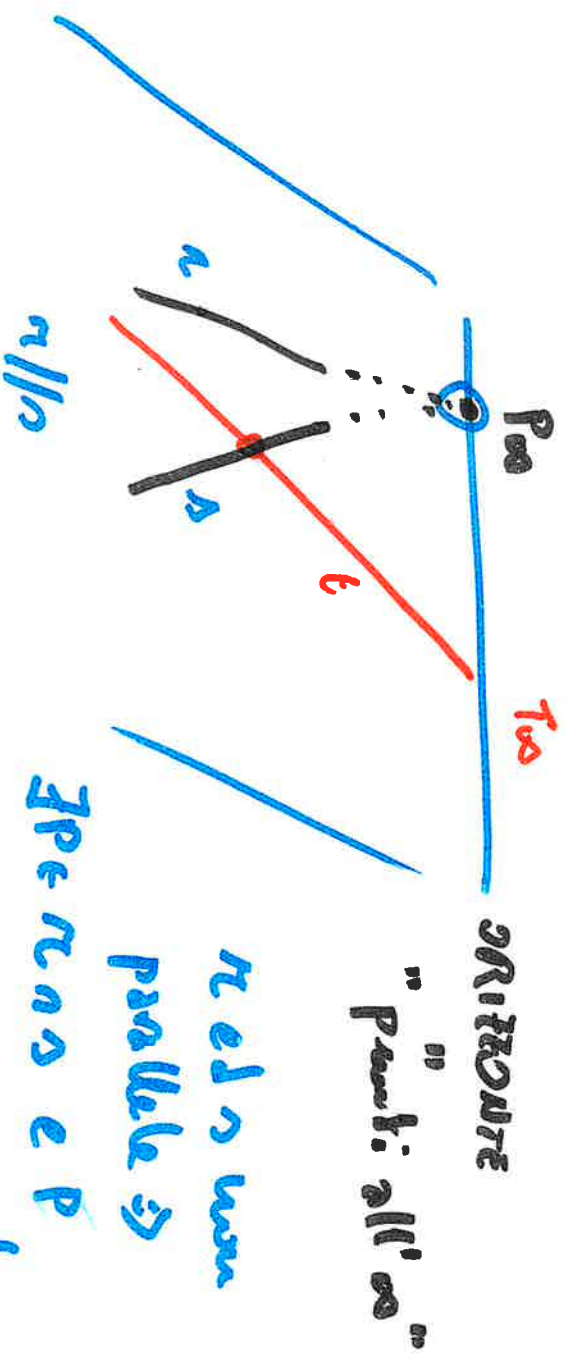


Amplificando e coordinate omogenee.



n ed n' parallele
 $3P \in n \cap n'$ e P' non è un punto all' ∞
 n ed n' parallele
 $\Rightarrow k n \cap n' = P_{\infty,3}$

oss: ad ogni sottospazio di $\mathbb{R}^3$ di $\dim = 1$
non convenuto in $\mathbb{R}^3$ si associa uno ed
un solo punto di π e viceversa ad ogni
punto di π si associa uno ed un solo sottospazio
di tipo $\mathcal{L}((x, y, z))$.

COSA DIRE DEL SOTT. 1-dimensionali con $\mathbb{Z}=0$.
Quanti per costruzione sono sott. convenuti
nella giacitura di π . $\Rightarrow$ sono direzioni della
retta di π .

~~MA~~ $\mathbb{P}^2 \setminus K$ è la geometria proiettiva di $\dim = 2$
i cui punti sono i sottospazi ^{rett.} 1-dimensionali di $\mathbb{R}^3$
e le cui rette sono i sott. 2 dim di $\mathbb{R}^3$

$$AG_1(\mathbb{K}) \subseteq AG_3(\mathbb{K})$$

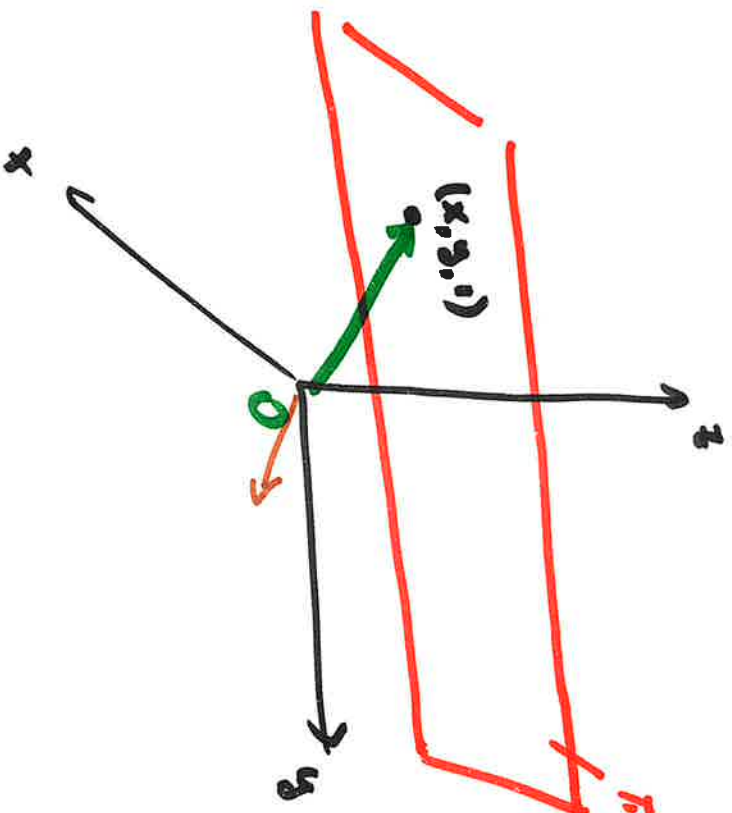
$$z = 1$$

$$(x, y) \rightarrow (x, y, 1)$$

ad ogni punto di π posso associare una direzione cioè il vettore spazio vettoriale

$$\mathcal{L}((x, y, 1))$$

Per ogni direzione non parallela a π $\exists!$ punto di π associato.



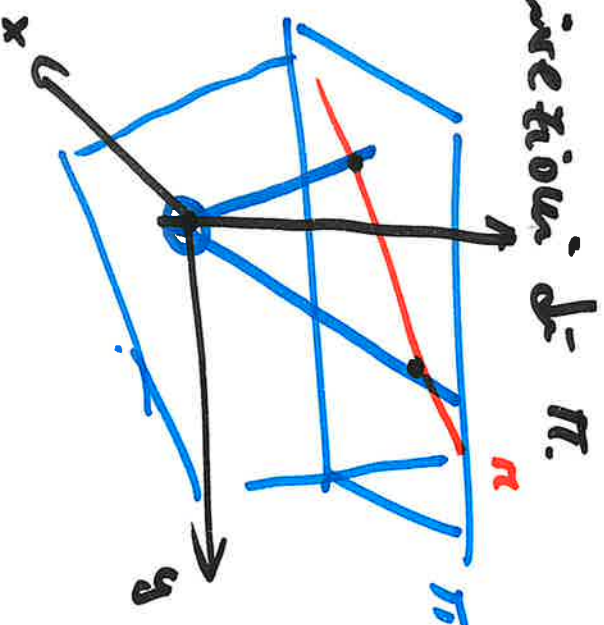
$$(x, y) \mapsto \mathcal{L}((x, y, 1))$$

$$[(x, y, 1)] = \text{insieme di vettori}$$

in $\mathcal{L}((x, y, 1))$.

I punti di $\mathbb{P}^2$ della forma $L((x, y, 1))$
 sono detti punti propri i quelli della forma
 $L((\ell, m, 0))$ con $(\ell, m) \neq (0, 0)$ sono detti
punti impropri o punti all'infinito.

Punti propri = punti affini di π
 punti impropri = direzione di π .



$z=2$
 $(x'', y'', 1)$
 $(x', y', 1)$

$$\begin{cases} \frac{x-x'}{x''-x'} = \frac{y-y'}{y''-y'} \\ z=1 \end{cases}$$

e dir. identificate dalla retta loro fatta
 nel sottospazio affine generato da $(0,0,0)$

$(x', y', 1)$ e $(x'', y'', 1)$.

Ma un sottospazio affine per l'origine e
anche un sottospazio vettoriale!

Quindi le coord. omogenee (sint. dei vettori) dei
punti di π sono elementi dello sp. vettoriale

$$\underline{\mathcal{L}((x', y', 1), (x'', y'', 1))} = \hat{\pi}$$

oss:

$\hat{\pi} \cap [\pi = 1]$ ci dà esattamente i punti di π_0

Il $\hat{\pi}$ contiene solo un punto di $\mathbb{P}^2_{1K}$
non proprio $\mathcal{L}((x'' - x', y'' - y', 0))$

ma questo corrisponde proprio alla direzione
di π_0 .

In $\mathbb{P}^2 \mathbb{R}$ i punti impropri corrispondono a quelli che soddisfano $z=0$ e che sono dunque considerati in un s. vettoriale 2 dimensionale = retta. $\rightarrow$ retta impropria o retta all'infinito.

In $AG_1(1k)$

$$r: \boxed{ax + by + c = 0}$$



In $\mathbb{P}^2 1k$

$$a \frac{x_1}{x_3} + b \frac{x_2}{x_3} + c = 0$$



$$\hat{r}: \boxed{ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0}$$

eq. omogenea

$$\text{DATA } \hat{r} \Rightarrow V \hat{P} \in \hat{r}, x_3(P) \neq 0 \Rightarrow \hat{P} = \mathcal{L}((x_1, x_2, x_3)) = \mathcal{L}\left(\left(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}, 1\right)\right)$$

$\Rightarrow P = (\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3})$ appartiene ad π .

$$P_{\infty} \in \hat{\pi}, x_3(P_{\infty}) = 0 \Rightarrow P_{\infty} = b((\ell, u, 0)) \quad (\ell, u, 0) \neq (0, 0, 0)$$

ma $a\ell + bu = 0 \Rightarrow$ i valori

Ma ℓ ed u soddisfanno l'eq. omogenea associata ad $\pi \Rightarrow$ corrispondono alla direzione di $\pi = \pi_{\infty}$.

OMOGENEIZZAZIONE.

$$f(x, y) = 0$$

In $AG_2(K)$

$$\longmapsto F(x_1 \ x_2 \ x_3) := f\left(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}\right).$$

x_3 $\frac{\partial f}{\partial x_3}$

In $\mathbb{P}^2_K$ si può lavorare con sottospazi vettoriali.

dim proiettiva = dim vettoriale - 1

punti

0

1

rette

1

2

Teorema: In $\mathbb{P}^2(K)$ due rette ^{distinte} hanno sempre un solo punto in comune; proprio se incidenti in $AG_2(K)$; improprio se parallele.

DM: $\tilde{\pi} \neq \tilde{\gamma} \Rightarrow |\tilde{\pi} \cap \tilde{\gamma}| \leq 1$ ovvio perché per 2 punti $\exists!$ retta. La Proprietà;

2 punti distinti corrispondono a 2 sol. 1-dim. di spunti $\Rightarrow$ la loro join è un rett. 2-dim.

1) 2 rette sono 2 sol. vett. 2-dimensionali in KK^3

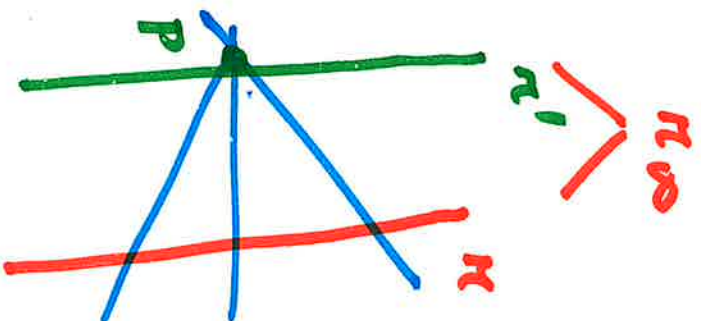
Formula di Grassmann $\dim(M \cap N) \geq \dim M + \dim N - \dim(K^t + A) =$

$$2+2-3=1$$

$\pi \cap \pi'$ è un punto $\Rightarrow$ se è proprio π incidente ad α
ed α ed α' hanno più di un punto,
diversi.

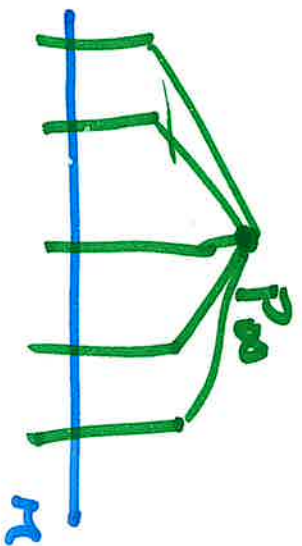
α è improprio (e la retta non
di $AG_2(K) \Rightarrow \pi // \alpha$. $\square$

$\pi // \alpha$



In IP^1K c'è una hierezione fra
le rette di un fascio (proprio)
e i punti di una retta primitiva.

(In questo posto ho una retta non per P ,
ogni retta per P interseca π in uno ed un solo
punto).



fascio improprio P_0
= direzione

$\Rightarrow$ ogni retta per P_0 interseca una retta r data con $P_0 \notin r$ in uno ed un solo punto

N.B. In questo caso c'è anche la retta $r_{P_0 P_0}$ che è quella di eq. $x_3 = 0$
 $\rightarrow$ retta impropria.

Un fascio di rette è l'insieme di tutte le rette per un punto di $\mathbb{P}^2$.

In generale partiamo da $AG_n(\mathbb{K})$
 vogliamo costruire $\mathbb{P}^n \mathbb{K}$ geom. proiettiva
 di dim = n.

$\mathbb{P}^n \mathbb{K} =$ insieme di tutti i
 sottospazi 1 dim.
 di $\mathbb{K}^{n+1}$

$$\cong \frac{\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}}{\mathbb{K}^*} =$$

= classi di equivalenza di
 vettori non nulli di $\mathbb{K}^{n+1}$
 meno di proporzionalità
 = classi di eq. di basi di vett. 1-dim.

$$I_n \quad A G_n(1K)$$

$$(x_1 \dots x_n) \in \mathbb{K}^n$$

$$I_n \quad P^n 1K$$

$$[(x_1 x_2 \dots x_n \ 1)]$$

sovrapposti

$$A \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = B$$

$$A \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} - x_{n+1} B = \underline{0}$$

se $x_{n+1} = 1 \Rightarrow$ si ottengono
i punti propri

se $x_{n+1} = 0 \Rightarrow$ si ottiene

il sistema $AX = \underline{0}$
 $\Rightarrow$ sol. di traslazione

I punti propri sono tutti e
soli quelli di $AG_n(1K)$ che

soddisfanno $AX = B$.

Gli impropri sono el. del sol. di traslazione

N.B.

$$[(x, y, z)] = [(2x, 2y, z)]$$

etc.

$$f(x_2 \dots x_n) \longmapsto F(x_2 \dots x_n x_{n+1}) :=$$

$$x_{n+1}^{\deg f} f\left(\frac{x_1}{x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{x_{n+1}}\right).$$

$$\left(\frac{x_1}{x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{x_{n+1}}\right) \xleftrightarrow{\quad} [(x_2 \dots x_n x_{n+1})] \\ \text{can } x_{n+1} \neq 0$$

$n=3$

$$(x, y, z)$$



$$[[x_2 x_3 x_4]]$$

$$[(x \ y \ z \ 1)]$$

$$\left(\frac{x_1}{x_n}, \frac{x_2}{x_n}, \frac{x_3}{x_n}\right)$$



$$[(x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_n)] \\ x_n \neq 0$$

Il sott. $X_4 = 0$ è un piano in $\mathbb{P}^3 \mathbb{K}$ detto piano
 improprio o piano all'infinito. e contiene
 tutti (e soli) i punti impropri = direzioni di $AG_3(\mathbb{K})$.

Due rette sono parallele se si intersecano in un
 punto improprio di $\mathbb{P}^3 \mathbb{K}$.

Sono sghembe se non si intersecano in $\mathbb{P}^3 \mathbb{K}$.

In $\mathbb{K}^4$ prendiamo 2 sottospazi di $\dim = 2$ di cui
 intersezione banale.

Sghembe

$$\begin{aligned}
 H &= L((1001), (0100)) \xrightarrow{(100)} \begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases} \\
 N &= L((0001), (0010)) \xrightarrow{(000)} \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

parallela

$$\tilde{n}' = \mathcal{L}((1001), (0010))$$

$$\tilde{n}' = \mathcal{L}((10001), (0010))$$

$$\tilde{n}'_n \tilde{n}' = \mathcal{L}((0010)) \rightarrow \text{punti con}$$

$$x_n = 0 \Rightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 / \Delta'$$

equazione delle rette per 2 punti in $\mathbb{P}^2$ e $\mathbb{P}^3$ k.

$$P = \mathcal{L}(x'_1, x'_2, x'_3)$$

$$Q = \mathcal{L}(x''_1, x''_2, x''_3)$$

$\Rightarrow X \in \text{rette per } P \text{ e } Q$

$\Leftrightarrow$ le coordinate di X

appartengono al sott.
vettoriale generato da

$$(x'_1, x'_2, x'_3) \text{ e } (x''_1, x''_2, x''_3).$$

(3)

$$\Leftrightarrow \text{rk} \begin{pmatrix} x_1' & x_2' & x_3' \\ x_1'' & x_2'' & x_3'' \\ x_1''' & x_2''' & x_3''' \end{pmatrix} = 2 \Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} x_1' & x_2' & x_3' \\ x_1'' & x_2'' & x_3'' \\ x_1''' & x_2''' & x_3''' \end{pmatrix} = 0$$

nel caso p.k. affini $x_3 = 1$

$$(a) \det \begin{pmatrix} x & y & 1 \\ x_1' & x_2' & x_3' \\ x_1'' & x_2'' & x_3'' \end{pmatrix} = 0$$

$$P, Q \text{ punti propri} \Rightarrow P = [x' \ y' \ 1] \\ Q = [x'' \ y'' \ 1]$$

$$\Rightarrow \det \begin{pmatrix} x & y & 1 \\ x_1' & y_1' & 1 \\ x_1'' & y_1'' & 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$P = [x' \ y' \ 1]$$

$$P \text{ punto proprio e direzione} \Rightarrow Q = [e \ w \ 0]$$

$$\Rightarrow \det \begin{pmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ \ell & m & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\underline{n=3}$$

$$R = \mathcal{L}(P, Q)$$

$$P = [(x_1' \ x_2' \ x_3' \ x_4')]$$

$$Q = [(x_1'' \ x_2'' \ x_3'' \ x_4'')]$$

$$X \in R \Leftrightarrow Rk \begin{pmatrix} x_1' & x_2' & x_3' & x_4' \\ x_1'' & x_2'' & x_3'' & x_4'' \\ x_1''' & x_2''' & x_3''' & x_4''' \end{pmatrix} = 2$$

$\Pi = \mathcal{L}(P, Q, R)$ con P, Q, R indipendenti geom.
cioè le coord. omogenee di P, Q, R
sono linearmente indipendenti.

$$P = [x_1' \dots]$$

$$Q = [x_1'' \dots]$$

$$R = [x_1''' \dots]$$

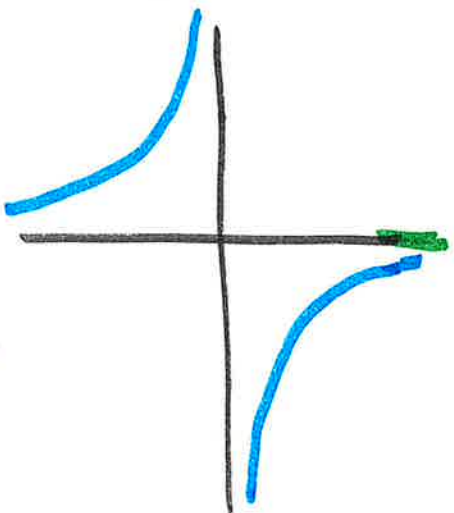
$$\det \begin{pmatrix} x_1' & x_2' & x_3' & x_4' \\ x_1'' & x_2'' & x_3'' & x_4'' \\ x_1''' & x_2''' & x_3''' & x_4''' \end{pmatrix} = 0.$$

N.B per $n=3$ due piani hanno sempre una retta in comune! in $\mathbb{P}^3$ $1K$.

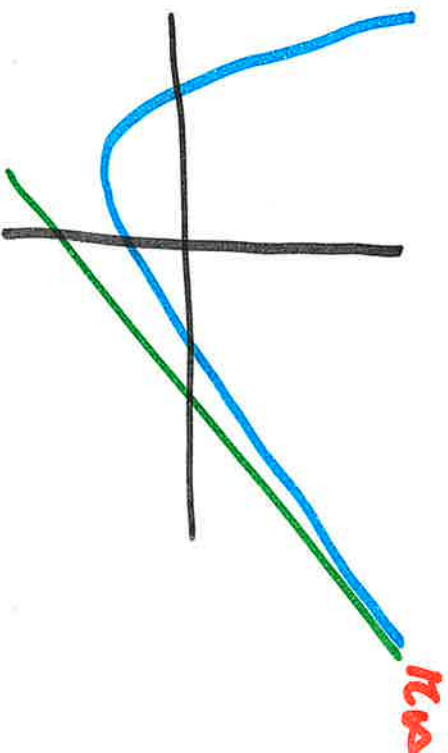
→ FORMULA DI GRASSMANN $b-h=2$
in particolare 0 la retta è contenuta in $X_4=0$
 $\Rightarrow$ non tutti i punti impropri dei piani $\Rightarrow$ piani
con la stessa direzione $\Rightarrow$ piani paralleli
o la stessa sia punti propri $\Rightarrow$ piani incidenti in
una retta.

Quando $1K=1R$ i punti impropri corrispondono a
cosa si ottiene facendo i limiti.

$$xy = 1 = 0$$



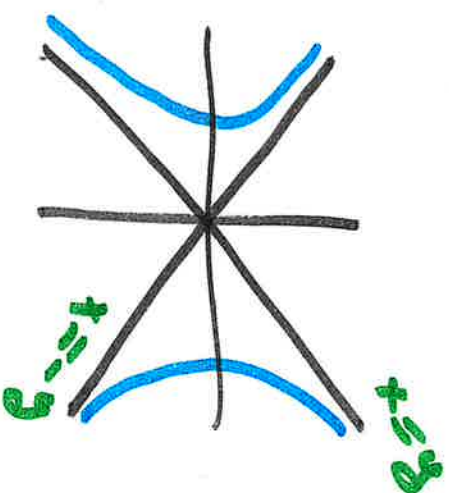
yes



$$\left(\frac{x_1}{x_3} \cdot \frac{x_2}{x_3} - 1 \right) x_3^2 = 0$$

$$\begin{cases} x_1 x_2 = x_3^2 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{OPR } x_1 = 0 \quad [(0 \ 1 \ 0)] &= y_0 \\ x_2 = 0 \quad [(1 \ 0 \ 0)] &= x_0 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= 1 \\ x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 &= 0 \\ [(1 \ 1 \ 0)] \\ [(1 \ -1 \ 0)] \end{aligned}$$